07/12/2015

Παράσταση Πολυωνύμου Παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους. Το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ της f στα σημεία αυτά είναι $p(x) = \Delta^0(x)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \Delta^n(x_0,\dots,x_n)(f)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

Πρόταση (Ιδιότητες Διαιρεμένων Διαφορών)

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C[a,b]$ τότε

(i) Έστω $i_0, \dots, i_n$ μια μετάθεση των αριθμών $1, 2, \dots, n$. Ισχύει $\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)(f) = \Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})(f)$. Οι Διαιρεμένες Διαφορές είναι συμμετρική συνάρτηση των σημείων.

Αποδ. Από το πολυώνυμο παρεμβολής έχουμε ότι $\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)$ είναι ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου. Αν θεωρήσουμε τη σειρά $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ προκύπτει το πολυώνυμο παρεμβολής με συντελεστή μεγ. όρου $\Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n})(f)$. Επειδή το πολυώνυμο παρεμβολής είναι μοναδικό έχουμε ότι $\Delta^n(x_0,\dots,x_n)(f) = \Delta^n(x_{i_0},\dots x_{i_n})(f)$

(ii) Αν $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ τότε $\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)(f) = 0$

Απόδειξη. Το πολυώνυμο παρεμβολής της f ταυτίζεται με την f, αφού $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Από τον τύπο παρεμβολής Νεύτωνα προκύπτει ότι ο συντελεστής ~~[illegible]~~ του x^n είναι μηδέν. Από τον τύπο παρεμβολής Νευτ. προκύπτει ότι ο συντελεστής του x^n είναι 0 $\Delta^n(x_0,\dots x_n)(f) = 0$

(iii) Αν $f \in C^n[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a',b')$ όπου $a' = \min\{x_0,\dots,x_n\}$, $b' = \max\{x_0,\dots,x_n\}$ τ.ω.

$$\Delta^n(x_0,\dots,x_n)(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Έστω $p \in \mathbb{P}_{n-1}$, το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ τότε

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Θεωρώ τον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα και παίρνουμε ακόμη 1 σημείο το x_n θα έχουμε $f(x_n) = p(x_0,\dots,x_n; x_n)$

$= p(x_n) + \Delta^n(x_0,\dots,x_n)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})$

Θεωρώντας οποιοδήποτε σημείο $x \in [a,b]$ διαφορετικό από τα $x_0,\dots,x_{n-1}$ έχουμε

$$f(x) = p(x) + \Delta^n(x_0,\dots,x_{n-1}; x)(f)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Αυτό δίνει μια άλλη έκφραση του σφάλματος επομένως $\Delta^n(x_0,\dots,x_{n-1};x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$, θα ισχύει και για $x = x_n$.

Για την εύρεση του πολυωνύμου παρεμβολής Νεύτωνα, κατασκευάζουμε τον πίνακα διαιρεμένων διαφορών ως εξής:

x_i	$n=0$	1	2
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f)$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$	
x_2	$\Delta^0(x_2)(f)$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$
x_n			

Παράδειγμα
ΒΑΣΙΚΟ!!

	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	8

x_i	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
-1	2			
0	0	-2		
1	0	0	1	
2	8	8	4	1

$p(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f)$
$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$= 2 + (-2)(x+1) + 1(x+1)x + 1(x+1)x(x-1) = 2 - 2x - 2 + x^2 + x + x^3 - x = x^3 + x^2 - 2x$

Θεωρούμε την σειρά των σημείων $2, 1, 0, -1$ τότε

$p(x) = \Delta^0(2)(f) + \Delta^1(2,1)(f)(x-2) + \Delta^2(2,1,0)(x-2)(x-1) + \Delta^3(2,1,0,-1)$
$(x-2)(x-1)x =$

$= 8 + 8(x-2) + 4(x-2)(x-1) + 1(x-2)(x-1)x = x^3 + x^2 - 2x$

Θεωρούμε τη μετάθεση $1, 0, -1, 2$ τότε $p(x) = 0 + 0(x-1) + 1(x-1)x + 1(x-1)x(x+1)$
$= x^3 + x^2 - 2x$

Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ $3^{ου}$ βαθμού στον πίνακα τιμών

x_i	-2	1	1	2
f_i	-1	1	5	7

Πίνακας Διαιρεμένων Διαφορών

x_i	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
-2	-1			
1	1	2		
1	5	2	0	
2	7	2	0	0

$p(x) = -1 + 2(x+2) = 2x+3$

Αν $f \in C^4[a,b]$ και $\max\limits_{-2 \le x \le 2} |f^{(4)}(x)| = 2$. Να βρεθεί το μέγιστο απόλυτο σφάλμα

$$\max_{-2 \le x \le 2} |f(x) - p(x)| \le \max_{-2 \le x \le 2} \frac{|f^4(\xi)|}{4!} \max_{-2 \le x \le 2} |\phi(x)|, \quad \phi(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4)$$

$= x^4 - 5x^2 + 4$

$\phi'(x) = 4x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = \sqrt{5}/\sqrt{2} \\ P_3 = -\sqrt{5}/\sqrt{2} \end{cases}$ $\quad \phi(0) = 4$, $\phi\left(\frac{\pm\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = -9/4$

$|\phi(0)| = 4$

$\left|\phi\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{9}{4}$

Η $|\phi(x)|$ έχει μέγιστο 4 στο $x=0$

$$\max_{-2 \le x \le 2} |f(x) - p(x)| \le \frac{2}{4!} \cdot 4 = \frac{1}{3}.$$